Equations différentielles linéaires

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I désigne un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$.

Une équation différentielle d'ordre n en la fonction inconnue $x \mapsto y(x)$ est une égalité E engageant $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Une solution sur I de cette équation différentielle est une fonction $x \mapsto y(x)$, n fois dérivable, telle que pour tout $x \in I$, l'égalité E soit vérifiée pour $x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$.

On ne sait résoudre qu'assez peu d'équation différentielle parmi lesquelles les suivantes.

I. Equation linéaire du premier ordre

1°) Définition

Déf : On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I toute équation différentielle E de la forme : $y' + a(x)y = b(x)$ avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues.

On appelle équation homogène (ou équation sans second membre) associée à E l'équation notée E_0 (ou $ESSM$) : $y' + a(x)y = 0$.

Lorsque la fonction a est constante, on parle d'équation à coefficient constant.

Théorème :

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution sur I à l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

2°) Démarche de résolution

Prop : Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continue et $E : y' + a(x)y = b(x)$.

Si y_1 désigne une solution particulière de l'équation E alors les solutions de E sont les fonctions de la forme $x \mapsto y_0(x) + y_1(x)$ avec y_0 solution de l'équation homogène $E_0 : y' + a(x)y = 0$.

Prop : (principe de superposition)

Soit $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ continues.

Si, pour $i = 1$ et 2, y_i est solution de $y' + a(x)y = b_i(x)$

alors $y_1 + y_2$ est solution particulière de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

3°) Cas des équations à coefficients constants

a) résolution de l'équation homogène

Déf : Soit $a \in \mathbb{K}$ et $E : y' + ay = 0$. On appelle équation caractéristique associée à E l'équation $r + a = 0$.

Prop : Si α est la solution de l'équation caractéristique alors les solutions de E sont les fonctions $y(x) = Ce^{\alpha x}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

b) résolution de l'équation entière

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ continue. Pour achever de résoudre $E : y' + ay = b(x)$ il suffit de savoir déterminer une solution particulière.

Prop : Cas $b(x) = P(x)$ avec P fonction polynomiale.

On peut trouver une solution particulière à l'équation E de la forme $y_1(x) = x^m Q(x)$ avec Q une fonction polynomiale de même degré que P et $m = 0$ si $a \neq 0$ et $m = 1$ sinon.

Prop : Cas $b(x) = P(x)e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et P une fonction polynomiale.

On peut trouver, par coefficients inconnus, une solution particulière à l'équation E de la forme $y_1(x) = x^m Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q fonction polynomiale de même degré que P et

$m = 0$ si α n'est pas solution de l'équation caractéristique

$m = 1$ sinon.

Prop : Cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $b(x)=P(x)\cos\omega x$ (resp. $P(x)\sin\omega x$) avec $\omega\in\mathbb{R}$ et P une fonction polynomiale réelle.
On peut trouver une solution particulière à l'équation E en considérant la partie réelle (resp. imaginaire) d'une solution à l'équation différentielle $z'+az=P(x)\mathrm{e}^{i\omega x}$.

4°) Cas général

a) résolution de l'équation homogène

Théorème :
Soit $a:I\to\mathbb{K}$ continue et A une primitive de a.
L'ensemble des solutions sur I de l'équation $y'+a(x)y=0$ est constitué des fonctions de la forme $x\mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $C\in\mathbb{K}$.

b) résolution de l'équation entière

Soit $a,b:I\to\mathbb{K}$ continues et $E:y'+a(x)y=b(x)$.

La résolution de l'équation homogène $E_0:y'+a(x)y=0$ a donné $y_0(x)=C\mathrm{e}^{-A(x)}$. Pour achever de résoudre E, il suffit maintenant de déterminer une solution particulière $y_1(x)$. Si celle-ci n'est pas apparente, on peut la rechercher par la méthode de la variation de la constante :
On cherche y_1 de la forme $y_1(x)=C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $x\mapsto C(x)$ fonction dérivable.
$y_1'(x)+a(x)y_1(x)=...=C'(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$.
y_1 est solution de E ssi $C'(x)=b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$

Ceci permet de déterminer C puis une fonction y_1 convenable.

II. Equation linéaire du second ordre à coefficients constants

1°) Définition

Déf : On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I toute équation différentielle E de la forme $y''+ay'+by=c(x)$
avec $a,b\in\mathbb{K}$ et $c:I\to\mathbb{K}$ une fonction continue.
On appelle équation homogène (ou équation sans second membre) associée l'équation notée E_0 (ou $ESSM$) : $y''+ay'+b=0$.
On appelle équation caractéristique associée l'équation $r^2+ar+b=0$ d'inconnue $r\in\mathbb{C}$.

Théorème :
Soit $a,b\in\mathbb{K}$, $c:I\to\mathbb{K}$ continue, $x_0\in I$ et $y_0,y_1\in\mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I à l'équation différentielle $y''+ay'+by=c(x)$ vérifiant les conditions initiales : $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=y_1$.

2°) Démarche de résolution

Prop : Si y_1 désigne une solution particulière de l'équation $E:y''+ay'+by=c(x)$ alors les solutions de E sont les fonctions de la forme $x\mapsto y_0(x)+y_1(x)$ avec y_0 solution de $E_0:y''+ay'+by=0$.

Pour résoudre l'équation différentielle $E:y''+ay'+by=c(x)$
0) on présente le type de l'équation
1) on résout l'équation homogène associée : $y_0(x)=\ldots$
2) on détermine une solution particulière : $y_1(x)=\ldots$
3) on exprime la solution générale : $y(x)=y_1(x)+y_0(x)$.

Prop : Soit $a,b\in\mathbb{K}$ et $c_1,c_2:I\to\mathbb{K}$ continues.
Si, pour $i=1$ et 2, y_i est solution de $y''+ay'+by=c_i(x)$
alors y_1+y_2 est solution particulière de $y''+py'+qy=c_1(x)+c_2(x)$.

3°) Résolution pratique de l'équation homogène

a) cadre complexe

Théorème :

Soit $a,b\in\mathbb{C}$ et $E_0 : y''+ay'+by=0$.

Si l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$ possède deux racines distinctes α et β alors les solutions sur I de E_0 sont les fonctions de la forme $y(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$ avec $C_1,C_2\in\mathbb{C}$.

Si l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$ possède une racine double α
alors les solutions sur I de E_0 sont les fonctions de la forme $y(x)=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$ avec $C_1,C_2\in\mathbb{C}$.

b) cadre réel

Théorème :

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ et $E_0 : y''+ay'+by=0$.

Si l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$ possède deux racines réelles distinctes α et β alors les solutions sur I de E_0 sont les fonctions de la forme $y(x)=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$ avec $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

Si l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$ possède une racine double α
alors les solutions sur I de E_0 sont les fonctions de la forme $y(x)=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$ avec $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

Si l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$ possède deux racines complexes conjuguées $\alpha\pm i\omega$ (avec $\omega\neq 0$) alors les solutions sur I de E_0 sont les fonctions de la forme
$y(x)=(C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x))e^{\alpha x}$.

Soit $a,b\in\mathbb{K}$ et $c : I\to\mathbb{K}$ continue.

Pour achever de résoudre $E : y''+ay'+by=c(x)$ il suffit d'en déterminer une solution particulière.

Prop : Cas $c(x)=P(x)$ avec P fonction polynomiale. On peut trouver une solution particulière à $E : y''+ay'+by=c(x)$ de la forme $y(x)=x^mQ(x)$ avec Q fonction polynomiale de même degré que P et $m=\begin{cases}0 \text{ si } b\neq 0\\ 1 \text{ si } b=0, a\neq 0\\ 2 \text{ si } b=0, a=0\end{cases}$.

Prop : Cas $c(x)=P(x)e^{\alpha x}$ avec P fonction polynomiale et $\alpha\in\mathbb{K}$. On peut trouver une solution particulière à $E : y''+ay'+by=c(x)$ de la forme $y(x)=x^mQ(x)e^{\alpha x}$ avec Q fonction polynomiale de même degré que P et $m=\begin{cases}0 \text{ si } \alpha \text{ racine de } r^2+ar+b=0\\ 1 \text{ si } \alpha \text{ racine simple de } r^2+ar+b=0\\ 2 \text{ si } \alpha \text{ racine double de } r^2+ar+b=0\end{cases}$.

En effet si $y(x)=z(x)e^{\alpha x}$ alors
$y''(x)+ay'(x)+by(x)=\left(z''(x)+(2\alpha+a)z'(x)+(\alpha^2+a\alpha+b)z(x)\right)e^{\alpha x}$

donc y est solution particulière ssi $z''+(2\alpha+a)z'+(\alpha^2+a\alpha+b)z=P(x)$.

Prop : Cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $c(x)=P(x)\cos\omega x$ (resp. $c(x)=P(x)\sin\omega x$) avec P fonction polynomiale et $\omega\in\mathbb{R}$).
On peut trouver une solution particulière de l'équation $E : y''+ay'+by=P(x)\cos\omega x$ (resp. $=P(x)\sin\omega x$) en considérant la partie réelle (resp. imaginaire) d'une solution de l'équation différentielle complexe $z''+az'+bz=P(x)e^{i\omega x}$.

4°) Oscillateurs linéaires libres

On se propose d'étudier l'équation différentielle $y''+2my'+\omega_0^2y=0$ sur $\mathbb{R}^+$n avec $m\geq 0$ et $\omega_0>0$.
m se comprend comme un paramètre d'amortissement.
ω_0 se comprend comme un paramètre de pulsation propre.

On introduit, l'équation caractéristique $r^2+2mr+\omega_0^2=0$ de discriminant $\Delta=4(m^2-\omega_0^2)$.

a) cas $m = 0$: amortissement nul

$\Delta = (2i\omega_0)^2$, solution de l'équation caractéristique $\pm i\omega_0$.

Solution générale : $y(x) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

C'est un mouvement périodique d'amplitude A et de période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Recherchons la solution vérifiant $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$.

On obtient $y(x) = y_0 \cos\omega_0 t$. Figure.

b) cas $\Delta < 0$: amortissement faible

$\Delta < 0 \Leftrightarrow m < \omega_0$. $\Delta = \left(2i\sqrt{\omega_0^2 - m^2}\right)^2 = (2i\omega)^2$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - m}$.

Solution de l'équation caractéristique $-m \pm i\omega$.

Solution générale : $y(x) = (C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x)\mathrm{e}^{-mx} = A\cos(\omega x - \varphi)\mathrm{e}^{-mx}$.

On parle de mouvement pseudo périodique de pseudo-période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ avec $T > T_0$.

Recherchons la solution vérifiant $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$.

On obtient $y(x) = y_0(\cos\omega x + \dfrac{m}{\omega}\sin\omega x)\mathrm{e}^{-mx} = A\cos(\omega x - \varphi)\mathrm{e}^{-mx}$. Figure.

c) cas $\Delta = 0$: amortissement critique

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \omega_0$. Solution de l'équation : $-m$.

Solution générale : $y(x) = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{-mx}$.

On parle de mouvement apériodique critique

Recherchons la solution vérifiant $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$.

On obtient $y(x) = y_0(mx + 1)\mathrm{e}^{-mx}$. Figure.

d) cas $\Delta > 0$: amortissement fort

L'équation caractéristique possède deux racines $-m \pm \omega$ avec $\omega = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

Solution générale : $y(x) = (C_1\mathrm{e}^{\omega x} + C_2\mathrm{e}^{-\omega x})\mathrm{e}^{-mx} = (D_1 \operatorname{ch}\omega x + D_2 \operatorname{sh}\omega x)\mathrm{e}^{-mx}$.

On parle de mouvement apériodique.

Recherchons la solution vérifiant $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$.

On obtient $y(x) = y_0(\operatorname{ch}\omega x + \dfrac{\omega}{m}\operatorname{sh}\omega x)\mathrm{e}^{-mx}$.

5°) Oscillateurs linéaires forcés

On se propose d'étudier l'équation différentielle $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = A\cos(\omega x)$

où m, ω_0, A, ω sont des paramètres strictement positifs.

A est l'amplitude forcée et ω la pulsation forcée.

Résolution de l'équation homogène : ci-dessus.

Cherchons une solution particulière de $z'' + 2mz' + \omega_0^2 z = A\mathrm{e}^{i\omega x}$ de la forme $z(t) = B\mathrm{e}^{i\omega x}$:

On obtient puis $z(x) = \dfrac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega)^2 + 4m^2\omega^2}}\mathrm{e}^{i(\omega x - \varphi)}$.

Par suite $y(x) = \dfrac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega)^2 + 4m^2\omega^2}}\cos(\omega x - \varphi)$ est solution particulière de l'équation étudiée.

La solution homogène tend vers 0 quand $x \to +\infty$ donc, pour x assez grand, c'est la solution particulière qui s'impose, on parle alors de régime permanent (ou forcé). Préalablement, on dit que le régime est transitoire.
Le régime permanent ne dépend pas des conditions initiales.